Title	mu-constant deformation に対する代数的局所コホモロジーとTjurina stratification (数式処理 : その研究と目指すもの)
Author(s)	鍋島, 克輔; 田島, 慎一
Citation	数理解析研究所講究録 (2013), 1843: 56-65
Issue Date	2013-07
URL	http://hdl.handle.net/2433/195010
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 1843 巻 2013 年 56-65

μ-constant deformation に対する代数的局所コホモロジーと Tjurina stratification

鍋島克輔*
NABESHIMA, KATSUSUKE
徳島大学大学院ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部
INSTITUTE OF SOCIO-ARTS AND SCIENCES, THE UNIVERSITY OF TOKUSHIMA

田島慎一†
TAJIMA, SHINICHI
筑波大学大学院数理物質系数学域
GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

Abstract

孤立特異点を持つ超曲面を定める擬斉次多項式に対し，その擬斉次多項式を主要部とするような半擬斉次多項式族による μ-constant deformation が与えられたとする。このとき，Tjurina 数の値およびイデアル商の構造に応じて変形パラメータ空間を分割，stratify する効率的なアルゴリズムを紹介する。

1 はじめに

擬斉次多項式を主要部とする半擬斉次多項式 $f \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ で定義された超曲面の族で μ-constant な変形が与えられたとする。このとき，対応する特異点の諸性質はその変形パラメータの値により変化する。

本稿では，Tjurina 数に注目し Tjurina 数の値に応じた変形パラメータ空間の効率的な分割アルゴリズムを紹介する (Tjurina stratification)。また，特異点の位相的・解析的性質を知る際に重要となるイデアル商のパラメータ付きスタンダード基底計算アルゴリズムも共に紹介する。

これらのアルゴリズムにおいて重要となる鍵は代数的局所コホモロジーである。超曲面を定義する半擬斉次多項式 f のヤコビイデアル $J = \langle \partial f/\partial x_1,\ldots,\partial f/\partial x_n\rangle$ により annihilate される代数的局所コホモロジー類のなす集合 H_J はベクトル空間となり，その次元は Milnor 数と等しい。また，イデアル $T = \langle f, \partial f/\partial x_1,\ldots,\partial f/\partial x_n\rangle$ により annihilate される代数的局所コホモロジー類のなす集合 H_T もベクトル空間となり，その次元は Tjurina 数と等しい。

代数的局所コホモロジー類のなすベクトル空間 H_J と H_T の関係を用いることで，Tjurina 数およびイデアル商のスタンダード基底を求める計算法を導出することができる。本稿では，これらの計算法について説明する。これらの計算アルゴリズムでは，H_J のパラメータ付き代数的局所コホモロジー類の計算を行うことが必要となるが，その方法については既に論文 [6, 7, 8] において発表してあり，プログラムも計算機代数

*nabeshima@tokushima-u.ac.jp
†tajima@math.tsukuba.ac.jp

システム Risa/Asir([13]) に実装されている。本稿で与える計算アルゴリズムでは，これら先行研究の成果を活用している。

本稿で紹介されるアルゴリズムは論文 [3] とはまったく異なる観点から導出されたアルゴリズムであり，計算効率も既存の方法に比べより効率的であることも明記しておきたい。

2 準備

この章では，準備として Milnor 数と Tjurina 数，半擬斉次多項式の概念，代数的局所コホモロジーに関する基本的事項について簡単に復習する。

2.1 Milnor 数と Tjurina 数

X を $\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍，$\mathcal{O}_X$ を X の正則関数の成す層 (sheaf)，$\mathcal{O}_{X,O}$ を $\mathcal{O}_X$ の原点における茎 (stalk) とする。今，f は X 上の正則関数であり，超曲面 $f(x)=0$ は原点 O を孤立特異点として持つとする。このとき

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \left(\mathcal{O}_{X,O} \Big/ \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle \right)$$

を **Milnor** 数といい

$$\tau = \dim_{\mathbb{C}} \left(\mathcal{O}_{X,O} \Big/ \left\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle \right)$$

を **Tjurina** 数という。ここで，$\langle h_1, \ldots, h_m \rangle$ は $h_1, \ldots, h_m$ が生成する $\mathcal{O}_{X,O}$ におけるイデアルを表す。

Milnor 数は位相的不変量であり Tjurina 数は解析的不変量であることが知られており，一般には，Tjurina 数 τ は Milnor 数 μ 以下である $(\mu \geq \tau)$。もし，f が擬斉次多項式であれば Milnor 数と Tjurina 数は等しい。逆に，正則（複素解析的）関数 f が孤立特異点を定めるとしその Milnor 数と Tjurina 数が一致したとすると，特異点の近傍で定義される正則（複素解析的）な座標変換であり，新たな座標では，f が擬斉次多項式で表現されるようなそのような正則座標変換が存在することが知られている ([14])。このことから，$\mu - \tau$ は与えられた特異点がどの程度擬斉次でないかを測る解析的な不変量と見做すことが出来る。

次に擬斉次多項式と半擬斉次多項式の定義を述べる。$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{N}^n$ を n 変数 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の重みベクトルとし，多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ に対して x^α は $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ を意味することとする。

定義 1.

1. 項 $x^\alpha \in \mathbb{C}[x]$ に対し，重みベクトル $\mathbf{w}$ に関する重み付き次数 d を $d = d_{\mathbf{w}}(x^\alpha) := \sum_{i=1}^n w_i \alpha_i$ により定める。

2. ゼロでない多項式 $f \in \mathbb{C}[x]$ が $(d; \mathbf{w})$ 型の擬斉次多項式 であるとは，f のすべての項の重みベクトル $\mathbf{w}$ に関する重み付き次数が d に等しいこととする。

3. f を $\mathbb{C}[x]$ の多項式とする。まず，$ord_{\mathbf{w}}(f) = \min\{d_{\mathbf{w}}(x^\alpha) : x^\alpha \text{は } f \text{ を構成する項}\}$ $(ord_{\mathbf{w}}(0) := -1)$ とする。多項式 f が $(d; \mathbf{w})$ 型 半擬斉次多項式であるとは，多項式 f が $f = f_0 + g$ なる形に表せることをいう。 ただしここで，f_0 は $(d; w)$ 型の擬斉次多項式であり，g は $ord_{\mathbf{w}}(g) > d$ または $g = 0$ を満たすとする。(本稿では，半擬斉次多項式は擬斉次多項式を含むとした。)

   多項式 f_0 を f の擬斉次部と呼び，g を構成する項を **upper monomial** と呼ぶ。

例えば, $f_0 = x_1^3 + x_2^7 \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ において, 重み $\mathbf{w} = (7,3) \in \mathbb{N}^2$ を考えれば, f_0 は $(21; (7,3))$ 型の擬斉次多項式である。このときの各項の重み付き次数は 21 である。また, $f = x_1^3 + x_2^7 + 2x_1x_2^5 \in \mathbb{C}[x_1, x_2]$ と重み $\mathbf{w} = (7,3) \in \mathbb{N}^2$ を考えれば, f は $f_0 = x_1^3 + x_2^7$ を擬斉次部とする $(21; (7,3))$ 型の半擬斉次多項式である。

2.2 代数的局所コホモロジー

代数的局所コホモロジーについては論文 [1, 5, 16, 17, 19, 20] などによって詳しく述べられている。ここでは, 代数的局所コホモロジーに関する基本的事項を簡単に復習するに留める。

$\mathbb{C}^n$ の原点 O に台を持つ代数的局所コホモロジー $\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ を

$$\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X) := \lim_{k\to\infty} Ext^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle^k, \mathcal{O}_X)$$

で定める。$\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ の元は開集合対 $(X, X-\{O\})$ に対する標準的な相対被覆が定める相対 Čech コホモロジーの要素として表現できることが知られているので, 記号 $\sum c_\lambda \left[\frac{1}{x^{\lambda+1}}\right]$ を用いて $\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)$ に属す代数的局所コホモロジー類を表す。このとき, x^κ と $\left[\frac{1}{x^{\lambda+1}}\right]$ の積は相対 Čech コホモロジー群の定義より, 次で与えられる

$$x^\kappa \left[\frac{1}{x^{\lambda+1}}\right] = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{x^{\lambda+1-\kappa}}\right] & \lambda_i \geq \kappa_i, i = 1, \ldots, n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ただし, $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_n) \in \mathbb{N}^n, \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n, \lambda + 1 - \kappa = (\lambda_1 + 1 - \kappa_1, \ldots, \lambda_n + 1 - \kappa_n)$ である。原点 O に孤立特異点を持つ多項式 $f \in \mathbb{C}[x]$ に対し, そのヤコビイデアル $J = \langle \partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n\rangle$ によって annihilate される代数的局所コホモロジー類のなす集合 H_J を

$$H_J := \left\{ \psi \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X) \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\psi = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\psi = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\psi = 0 \right\}$$

で定める。また, イデアル $T = \langle f, \partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n\rangle$ によって annihilate される代数的局所コホモロジー類のなす集合 H_T を

$$H_T := \left\{ \psi \in \mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X) \;\middle|\; f(x)\psi = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\psi = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\psi = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\psi = 0 \right\}$$

で定める。これらは, 有限次元ベクトル空間となることが知られており, $\dim_{\mathbb{C}}(H_J)$ は Milnor 数, $\dim_{\mathbb{C}}(H_T)$ は Tjurina 数と一致する。

論文 [1, 5, 16, 17, 20] において, H_J, H_T の基底を計算するアルゴリズムが紹介されている。また, f がパラメータを持つ場合, H_J, H_T の基底を計算するアルゴリズムもすでに論文 [6, 7, 8] において述べられており, 著者たちによって計算機代数システム Risa/Asir ([13]) に実装されている。f が半擬斉次な場合には, 半擬斉次性を利用することで H_J を効率的に計算することが可能となる。この効率的な方法が論文 [8, 9] に与えられている。 また, 半擬斉次孤立特異点の研究に代数的局所コホモロジーを応用した論文として [10, 11, 12] 等がある。

3 基礎理論

本章では代数的局所コホモロジーを用いて Milnor 数と Tjurina 数の関係を考える。原点に孤立特異点を持つ多項式を $f \in \mathbb{C}[x]$ とする。今, ベクトル空間 H_J の各要素を f 倍する次の線型写像を考える。

$$f : H_J \longrightarrow H_J$$

このとき,

$$\mathrm{Ker}(f)=\{\psi\in H_J\,|\,f\psi=0\}=\left\{\psi\in\mathcal{H}^n_{[O]}(\mathcal{O}_X)\,\middle|\,\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\psi=\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\psi=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\psi=0\right\}$$

となる。したがって, $\mathrm{Ker}(f)$ の次元は Tjurina 数に他ならないことが直ちにわかる。

写像 $f:H_j\longrightarrow H_J$ の像集合, すなわちベクトル空間 H_J の各要素を f 倍して得られる代数的局所コホモロジー類からなる集合を

$$f(H_J):=\{f\psi|\psi\in H_J\}$$

で表すこととする。

以上のことをまとめると次の命題と系を得ることができる。

命題 2 ([18]). 次は完全列である。

$$0\longrightarrow H_T\longrightarrow H_J\longrightarrow f(H_J)\longrightarrow 0$$

系 3. 命題 2 より

$$\dim_{\mathbb{C}}(f(H_J))=\dim_{\mathbb{C}}(H_J)-\dim_{\mathbb{C}}(H_T)=\mu-\tau$$

となる。したがって, $\tau=\mu-\dim_{\mathbb{C}}(f(H_J))$ となる。

命題 4 ([18]). $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(f_t(H_J))=\{h\in\mathcal{O}_{X,O}\,|\,hf\in J\}$, ただし $J=\langle\partial f/\partial x_1,\ldots,\partial f/\partial x_n\rangle\subset\mathcal{O}_{X,O}$ である。

このことより, 定義多項式 f にパラメータが含まれている場合, 対応するパラメータ付き代数的局所コホモロジーの基底を計算し, さらに $f(H_J)$ の構造がパラメータにどの様に依存するかを計算することで, Tjurina 数やイデアル商のパラメータ依存の仕方が求められることがわかる。

4 計算アルゴリズム

本章では, 孤立特異点を持つ半擬斉次な多項式がパラメータを含み, かつ μ-constant なものが与えられたとき, Tjurina 数の値に応じてパラメータ空間を分割し stratification を求める効率的なアルゴリズムを紹介する。また, 定義多項式の擬斉次部にパラメータを「含まない場合」と「含む場合」とでは計算処理が異なるため, それぞれ分けて計算アルゴリズムを紹介する。

ここでは各パラメータは $\mathbb{C}$ 上を動くものとする。孤立特異点を定義する多項式がパラメータを持つため, 一般にパラメータの値を連続的に変化させても特異点の諸性質が不連続に変化するような現象 (bifurcation) が生じうる。Tjurina 数やイデアル商の構造が不連続に変化する仕方を求め記述する為に, パラメータの条件を記述する方法と, パラメータの条件に対する演算が必要となる。本稿では, パラメータの条件を記述する方法として代数多様体とそれらの差集合を用いる。多項式 $h_1,\ldots,h_m\in\mathbb{C}[t]=\mathbb{C}[t_1,\ldots,t_l]$ に対し, これらの共通零点集合を $\mathbb{V}(h_1,\ldots,h_m)=\{t\in\mathbb{C}^l|\ h_1(t)=\cdots=h_m(t)=0\}$ で表わす。イデアルの組 $I_1,J_1\subset\mathbb{C}[t_1,t_2,...,t_l]$ が定める差集合 $\mathbb{V}(I_1)\backslash\mathbb{V}(J_1)$ 等を用いてパラメータの条件を表すことにする。このような差集合を stratum と呼ぶことにする。パラメータ付き系を扱う計算を実行する為に, イデアルの組 I_1,J_1 が定める strutum とイデアルの組 I_2,J_2 が定める strutum の引き算 $(\mathbb{V}(I_1)\backslash\mathbb{V}(J_1))\backslash(\mathbb{V}(I_2)\backslash\mathbb{V}(J_2))$, 和集合 $(\mathbb{V}(I_1)\backslash\mathbb{V}(J_1))\cup(\mathbb{V}(I_2)\backslash\mathbb{V}(J_2))$, 積集合 $(\mathbb{V}(I_1)\backslash\mathbb{V}(J_1))\cap(\mathbb{V}(I_2)\backslash\mathbb{V}(J_2))$ 等の stratum と stratum 同士の演算が必要となる。また, stratum が空集合かどうか $(\mathbb{V}(I_1)\backslash\mathbb{V}(J_1)=\emptyset$ or $\neq\emptyset)$ を判定する必要がある。これらの計算アルゴリズムについては論文 [2, 15] で詳しく紹介されているのでここでは説明を省略する。

4.1 擬斉次部にパラメータ無し

μ-constant な半擬斉次多項式を $f_t := f_0 + g_t$ と表す。ただし, f_0 は擬斉次部を表し g_t は upper monomial からなる多項式であり g_t の係数はパラメータ $t = (t_1, \ldots, t_l)$ を含むとする。このとき, f_t の取り得る各 Tjurina 数に対応する部分パラメータ空間 (Tjurina stratification) を求めるアルゴリズムを紹介すると共に, 数学的に重要な $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(f_t(H_J))$ のスタンダード基底を効率的に計算するアルゴリズムも紹介する。

次のアルゴリズムでは, ステップ 1, 2, 3, 4 が Tjurina stratification のアルゴリズムを表し, ステップ 1, 2, 3, 5 が $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(f_t(H_J))$ のスタンダード基底計算アルゴリズムを表す。ここではステップ 1, 2, 3 が同じ操作のため 1 つのアルゴリズムで書くようにした。

アルゴリズム 1

入力: f_t :半擬斉次多項式

出力: Tjurina stratification, Tjurina 数, $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(f_t(H_J))$ のスタンダード基底

1. 重みベクトルと両立する項順序を用いてベクトル空間 H_J のパラメータ付き代数的局所コホモロジー類の基底を計算する ($J = \langle \partial f_t/\partial x_1, \ldots, \partial f_t/\partial x_n \rangle$)。(計算法は論文 [8] 参照。)
2. ステップ 1 で求めた代数的局所コホモロジー類の基底の元たちをそれぞれ f_t 倍し $f_t(H_J)$ を作る。
3. パラメータ空間の分割を行いながら掃出し法を適用し, ベクトル空間 $f_t(H_J)$ の一次独立な基底の構成を行う。
4. ステップ 3 で得られたベクトル空間 $f_t(H_J)$ の基底に対して 各 stratum ごとに

$$\mu - (\text{基底を構成する要素の数})$$

   を計算する。ここで, μ は Milnor 数を表す。
5. ステップ 3 で得られたベクトル空間 $f_t(H_J)$ の基底に対して 各 stratum ごとに論文 [20] のスタンダード基底計算法を適用する。(重みベクトルと両立する項順序を使う)

例 5. 多項式 $f = x^3 + y^{10} + t_1 xy^7 + t_2 xy^8$ を考える。ここでは x, y が変数で $t = (t_1, t_2)$ が $\mathbb{C}^2$ を動く変形パラメータとする。f は半擬斉次多項式であり擬斉次部は $x^3 + y^{10}$ であり upper monomial は xy^7 と xy^8 である。この Milnor 数は 18 であり, upper monomial の係数 t_1, t_2 が Tjurina 数にどのように影響を与えるか知るために, アルゴリズム 1 を実行する。また, $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(f_t(H_J))$ のスタンダード基底も求める。

1. まず, f に付随したパラメータ付き代数的局所コホモロジーの基底を求める。論文 [8] に与えた計算方法でベクトル空間 H_J の基底を求め, 次を得る。

$$\left\{ \left[\frac{1}{xy}\right], \left[\frac{1}{xy^2}\right], \left[\frac{1}{xy^3}\right], \left[\frac{1}{xy^4}\right], \left[\frac{1}{x^2y}\right], \left[\frac{1}{xy^5}\right], \left[\frac{1}{x^2y^2}\right], \left[\frac{1}{xy^6}\right], \left[\frac{1}{x^2y^3}\right], \left[\frac{1}{xy^7}\right], \left[\frac{1}{x^2y^4}\right], \right.$$
$$\left[\frac{1}{x^2y^5}\right], \left[\frac{1}{x^2y^6}\right], \left[\frac{1}{xy^8}\right] - \frac{1}{3}t_1 \left[\frac{1}{x^3y}\right], \left[\frac{1}{xy^9}\right] - \frac{1}{3}t_1 \left[\frac{1}{x^3y^2}\right] - \frac{1}{3}t_2 \left[\frac{1}{x^3y}\right], \left[\frac{1}{x^2y^7}\right] - \frac{7}{10}t_1 \left[\frac{1}{xy^{10}}\right] +$$
$$\frac{7}{30}t_1^2 \left[\frac{1}{x^3y^3}\right] + \frac{7}{30}t_1t_2 \left[\frac{1}{x^3y^2}\right], \left[\frac{1}{x^2y^8}\right] - \frac{1}{3}t_1 \left[\frac{1}{x^4y}\right] - \frac{7}{10}t_1 \left[\frac{1}{xy^{11}}\right] + \frac{7}{30}t_1^2 \left[\frac{1}{x^3y^4}\right] - \frac{4}{5}t_2 \left[\frac{1}{xy^{10}}\right] +$$
$$\frac{1}{2}t_1t_2 \left[\frac{1}{x^3y^3}\right] + \frac{4}{15}t_2^2 \left[\frac{1}{x^3y^2}\right], \left[\frac{1}{x^2y^9}\right] - \frac{1}{3}t_1 \left[\frac{1}{x^4y^2}\right] - \frac{7}{10}t_1 \left[\frac{1}{xy^{12}}\right] + \frac{7}{30}t_1^2 \left[\frac{1}{x^3y^5}\right] - \frac{1}{3}t_2 \left[\frac{1}{x^4y}\right] -$$
$$\left. \frac{4}{5}t_2 \left[\frac{1}{xy^{11}}\right] + \frac{1}{2}t_1t_2 \left[\frac{1}{x^3y^4}\right] + \frac{4}{15}t^2 \left[\frac{1}{x^3y^3}\right] \right\}.$$

2. 次に, ステップ 1 で得られた基底を f 倍すると, パラメータ空間 $\mathbb{C}^2$ 上では

$$\left\{\frac{1}{30}t_1\left[\frac{1}{xy}\right], -\frac{1}{30}t_1\left[\frac{1}{xy^2}\right]-\frac{2}{15}t_2\left[\frac{1}{xy}\right]\right\}$$

となる。

3. ステップ 2 で得られた元から, パラメータ空間の分割を行いながら掃出し法を適用しベクトル空間 $f(H_J)$ の一次独立な基底の構成を行うと次のようになる。

$$\begin{array}{ll} \mathbb{C}^2\backslash\mathbb{V}(t_1) \text{ のとき}, & f(H_J)=\mathrm{Span}\left\{\left[\frac{1}{xy^2}\right],\left[\frac{1}{xy}\right]\right\}, \\ \mathbb{V}(t_1)\backslash\mathbb{V}(t_2) \text{ のとき}, & f(H_J)=\mathrm{Span}\left\{\left[\frac{1}{xy}\right]\right\}, \\ \mathbb{V}(t_1,t_2) \text{ のとき}, & f(H_J)=\mathrm{Span}\{0\}, \end{array}$$

となる。

4. Milnor 数は $\mu=18$ であることと, ステップ 3 の結果より, Tjurina 数 τ はパラメータ $t=(t_1,t_2)$ により次のように値が変わることが分かる。

$$\begin{array}{ll} \mathbb{C}^2\backslash\mathbb{V}(t_1) \text{ のとき}, & \text{Tjurina 数は } \tau=18-2=16, \\ \mathbb{V}(t_1)\backslash\mathbb{V}(t_2) \text{ のとき}, & \text{Tjurina 数は } \tau=18-1=17, \\ \mathbb{V}(t_1,t_2) \text{ のとき}, & \text{Tjurina 数は } \tau=18-0=18, \end{array}$$

となる。

5. ステップ 3 で得られたベクトル空間 $f(H_J)$ の一次独立な基底に対して, 論文 [20] のスタンダード基底を求める方法を適用すると変数 (x,y) の重みベクトル $\mathbf{w}=(10,3)$ によってなる局所重み付き辞書式項順序 $(1>x>y)$ に関する $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(f(H_J))$ のパラメータ付きスタンダード基底が即座に得られる。

$$\begin{array}{ll} \mathbb{C}^2\backslash\mathbb{V}(t_1) \text{ のとき}, & \{x,y^2\}, \\ \mathbb{V}(t_1)\backslash\mathbb{V}(t_2) \text{ のとき}, & \{x,y\}, \\ \mathbb{V}(t_1,t_2) \text{ のとき}, & \emptyset, \end{array}$$

となる。

次の例はパラメータが複雑に絡み合った例である。

例 6. 多項式 $f=x^5+y^{11}+t_1xy^9+t_2x^2y^7$ を考える。ここでは x,y が変数で $t=(t_1,t_2)$ が $\mathbb{C}^2$ を動く変形パラメータとする。f は半擬斉次多項式であり擬斉次部は x^5+y^{11} であり upper monomial は xy^9 と x^2y^7 である。この Milnor 数は 40 であり, アルゴリズム 1 のステップ 1, 2, 3, 4 から upper monomial の係数 $t=(t_1,t_2)$ により Tjurina 数 τ は次のように値が変わることが分かる。

$$\begin{array}{ll} \mathbb{C}^2\backslash\mathbb{V}(t_1t_2(t_1^2-4t_2)(9t_1^2-22t_2)) \text{ のとき}, & \text{Tjurina 数は } \tau=40-6=34, \\ \mathbb{V}(t_1^2-4t_2)\backslash\mathbb{V}(t_1,t_2) \text{ のとき}, & \text{Tjurina 数は } \tau=40-5=35, \\ \mathbb{V}(t_1)\backslash\mathbb{V}(t_1,t_2) \text{ のとき}, & \text{Tjurina 数は } \tau=40-5=35, \\ \mathbb{V}(9t_1^2-22t_2)\backslash\mathbb{V}(t_1,t_2) \text{ のとき}, & \text{Tjurina 数は } \tau=40-6=34, \\ \mathbb{V}(t_1)\backslash\mathbb{V}(t_1,t_2) \text{ のとき}, & \text{Tjurina 数は } \tau=40-6=34, \\ \mathbb{V}(t_1,t_2) \text{ のとき}, & \text{Tjurina 数は } \tau=40-0=40, \end{array}$$

となる。

4.2 擬斉次部にパラメータ有り

半擬斉次多項式を $f_{\{s,t\}} := f_{\{s,0\}} + g_t$ と表す。ただし, $f_{\{s,0\}}$ は擬斉次部であり係数にパラメータ $s = (s_1, \ldots, s_k)$ を含み, g_t は upper monomial からなる多項式であり, 係数にパラメータ $t = (t_1, \ldots, t_l)$ を含むとする。サブセクション 4.1 と異なる点は擬斉次部にもパラメータがあることである。このとき, $f_{\{s,t\}}$ の取り得る各 Tjurina 数に対応する stratum (部分パラメータ空間) を求めるアルゴリズムを紹介する (Tjurina stratification) と共に, 数学的に重要な $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(f_t(H_J))$ のスタンダード基底を効率的に計算するアルゴリズムも紹介する。(ここで, $J = \langle \partial f_{\{s,t\}}/\partial x_1, \ldots, \partial f_{\{s,t\}}/\partial x_n \rangle$ である。)

ここで紹介するアルゴリズムは基本的にはアルゴリズム 1 と同じである。しかしながら, 擬斉次部にもパラメータが存在するとパラメータの値によって擬斉次部が原点に孤立特異点を持たない場合が発生する可能性がある。このような場合は考察の対象外として計算から除外しなければならない。

さてどのようにして孤立特異点を持たない場合の stratum を検出し除外するか?

特異点集合の次元の判定のために, 本稿では, まず, 擬斉次部のヤコビイデアルの包括的グレブナー基底系 (comprehensive Gröbner system)[2, 4, 21] を計算し, 次に包括的グレブナー基底系の各断片 (segment) の次元がゼロ次元かをチェックをするという計算法を用いる。この処理の後にアルゴリズム 1 と同じ操作をすることによって Tjurina stratification と $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(f_t(H_J))$ のスタンダード基底を得ることができる。

アルゴリズム 2

入力: $f_{\{s,t\}} := f_{\{s,0\}} + g_t$:半擬斉次多項式

出力: Tjurina stratification, Tjurina 数, $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(f_{\{s,t\}}(H_J))$ のスタンダード基底

0. 擬斉次部のヤコビイデアル $J = \langle \partial f_{\{s,0\}}/\partial x_1, \ldots, \partial f_{\{s,0\}}/\partial x_n \rangle$ の包括的グレブナー基底系を計算しヤコビイデアルの次元が 0 次元かどうかチェックする。ゼロ次元でなければ孤立特異点が存在しないので, その場合の stratum (パラメータの条件) を除外する。
1. 重みベクトルと両立する項順序を用いてベクトル空間 H_J のパラメータ付き代数的局所コホモロジー類の基底を計算する。(計算法は論文 [8] 参照。)
2. ステップ 1 で求めた代数的局所コホモロジー類の基底の元たちをそれぞれ $f_{\{s,t\}}$ 倍し $f_{\{s,t\}}(H_J)$ を作る。
3. パラメータ空間の分割を行いながら掃出し法を適用し, ベクトル空間 $f_{\{s,t\}}(H_J)$ の一次独立な基底の構成を行う。
4. ステップ 3 で得られたベクトル空間 $f_{\{s,t\}}(H_J)$ の基底たちに対して 各 stratum ごとに

$$\mu - (\text{基底を構成する要素の数})$$

   を計算する。ここで, μ は Milnor 数を表す。
5. ステップ 3 で得られたベクトル空間 $f_{\{s,t\}}(H_J)$ の基底たちに対して各 stratum ごとに論文 [20] のスタンダード基底計算法を適用する。(重みベクトルと両立する項順序を使う)

例 7. 多項式 $f = x^3 + sx^2y^4 + y^{12} + t_1y^{13} + t_2y^{14}$ を考える。ここでは x, y が変数で (s, t_1, t_2) は $\mathbb{C}^3$ を動く変形パラメータとする。f は半擬斉次多項式であり擬斉次部は $x^3 + sx^2y^4 + y^{12}$, upper monomial は y^{13} と y^{14} である。この Milnor 数は 22 である, パラメータ s, t_1, t_2 が Tjurina 数にどのように影響を与えるか知るために, アルゴリズム 2 を実行する。また, $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(f_t(H_J))$ のスタンダード基底も求める。

0. f の擬斉次部を $f_{\{s,0\}} = x^3+sx^2y^4+y^{12}$ と置く。まず, $f_{\{s,0\}}$ のヤコビイデアル $\langle \partial f_{\{s,0\}}/\partial x, \partial f_{\{s,0\}}/\partial y\rangle$ の包括的グレブナ基底系 (全次数逆辞書式項順序 $(x>y)$) を計算する。 $\langle \partial f_{\{s,0\}}/\partial x, \partial f_{\{s,0\}}/\partial y\rangle$ の包括的グレブナ基底系は次で与えられる。

stratum	グレブナー基底
$\mathbb{C}^2\backslash\mathbb{V}(4s^4+27s)$	$\{sy^3x^2+3y^{11}, (4s^3+27)y^3x^3, 3x^2+2sy^4x, (-4s^3-27)x^4\}$
$\mathbb{V}(4s^3+27)$	$\{sy^3x^2+3y^{11}, -2s^2x^2+9y^4x\}$
$\mathbb{V}(s)\backslash\mathbb{V}(4s^3+27)$	$\{x^2, y^{11}\}$

各 stratum のグレブナー基底をチェックすると, $\mathbb{C}^3\backslash\mathbb{V}(4s^4+27s)$ と $\mathbb{V}(s)\backslash\mathbb{V}(4s^3+27)$ のとき次元が 0 となり, $\mathbb{V}(4s^3+27)$ のとき次元が 1 となる。したがって, $\mathbb{V}(4s^3+27)$ の時は孤立特異点を持たないので以下の計算から除外する。

1. 次に f に付随したパラメータ付き代数的局所コホモロジーの基底を求める。($\mathbb{V}(4s^3+27)$ は除外してある。) ベクトル空間 H_J の基底を論文 [8] のアルゴリズムで求めると次を得る。サブセクション 4.1 とは違い 2 つの場合が出力される。

$\mathbb{V}(s)$ のとき,

$$\left\{\left[\frac{1}{xy}\right],\left[\frac{1}{xy^2}\right],\left[\frac{1}{xy^3}\right],\left[\frac{1}{xy^4}\right],\left[\frac{1}{xy^5}\right],\left[\frac{1}{x^2y}\right],\left[\frac{1}{xy^6}\right],\left[\frac{1}{x^2y^2}\right],\left[\frac{1}{xy^7}\right],\left[\frac{1}{x^2y^3}\right],\left[\frac{1}{xy^8}\right],\left[\frac{1}{x^2y^4}\right],\right.$$
$$\left.\left[\frac{1}{xy^9}\right],\left[\frac{1}{x^2y^5}\right],\left[\frac{1}{xy^{10}}\right],\left[\frac{1}{xy^{11}}\right],\left[\frac{1}{x^2y^6}\right],\left[\frac{1}{x^2y^7}\right],\left[\frac{1}{x^2y^8}\right],\left[\frac{1}{x^2y^9}\right],\left[\frac{1}{x^2y^{10}}\right],\left[\frac{1}{x^2y^{11}}\right]\right\}.$$

$\mathbb{C}^3\backslash\mathbb{V}(s(4s^3+27))$ のとき,

$$\left\{\left[\frac{1}{xy}\right],\left[\frac{1}{xy^2}\right],\left[\frac{1}{xy^3}\right],\left[\frac{1}{xy^4}\right],\left[\frac{1}{xy^5}\right],\left[\frac{1}{x^2y}\right],\left[\frac{1}{xy^6}\right],\left[\frac{1}{x^2y^2}\right],\left[\frac{1}{xy^7}\right],\left[\frac{1}{x^2y^3}\right],\left[\frac{1}{xy^8}\right],\left[\frac{1}{xy^8}\right],\right.$$
$$\left[\frac{1}{x^2y^4}\right],\left[\frac{1}{xy^9}\right],\left[\frac{1}{xy^{10}}\right],\left[\frac{1}{xy^{11}}\right],\left[\frac{1}{x^3y}\right]-\frac{3}{2s}\left[\frac{1}{x^2y^5}\right],\left[\frac{1}{x^3y^2}\right]-\frac{3}{2s}\left[\frac{1}{x^2y^6}\right],\left[\frac{1}{x^3y^3}\right]-\frac{3}{2s}\left[\frac{1}{x^2y^7}\right],$$
$$\left[\frac{1}{x^3y^4}\right]-\frac{3}{2s}\left[\frac{1}{x^2y^8}\right]-\frac{1}{3}s\left[\frac{1}{xy^{12}}\right],\left[\frac{1}{x^4y}\right]-\frac{3}{2s}\left[\frac{1}{x^3y^5}\right]+\frac{9}{4s^2}\left[\frac{1}{x^2y^9}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{xy^{13}}\right]-\frac{13}{24}t_1\left[\frac{1}{xy^{12}}\right],$$
$$\left[\frac{1}{x^4y^2}\right]-\frac{3}{2s}\left[\frac{1}{x^3y^6}\right]+\frac{9}{4s^2}\left[\frac{1}{x^2y^{10}}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{xy^{14}}\right]-\frac{13}{24}t_1\left[\frac{1}{xy^{13}}\right]+\left(\frac{169}{288}t_1^2-\frac{7}{12}t_2\right)\left[\frac{1}{xy^{12}}\right],$$
$$\left[\frac{1}{x^4y^3}\right]-\frac{3}{2s}\left[\frac{1}{x^3y^7}\right]+\frac{9}{4s^2}\left[\frac{1}{x^2y^{11}}\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{xy^{15}}\right]-\frac{13}{24}t_1\left[\frac{1}{xy^{14}}\right]+\left(\frac{169}{288}t_1^2-\frac{7}{12}t_2\right)\left[\frac{1}{xy^{13}}\right]-\left(\frac{2197}{3456}t_1^3\right.$$
$$\left.\left.-\frac{91}{72}t_1t_2\right)\left[\frac{1}{xy^{12}}\right]\right\}.$$

2—4. 各 stratum ごとに, 得られたパラメータ付き代数的局所コホモロジーの基底を f 倍し, パラメータ空間の分割を行いながら掃き出し法を適用し, 分割により得られた各 stratum ごとの $f(H_J)$ の一次独立な基底の構成を行うと, 以下の分類が得られる。

ただし, $\mathbb{V}(4s^3+27)$ の場合は, 擬斉次部分が孤立特異点を与えないので除外してある。

stratum	$f(H_J)$ の一次独立な基底	Tjurina 数
$\mathbb{V}(s)$	$\{0\}$	$22-0=22$
$\mathbb{C}^3\backslash\mathbb{V}((4s^3+27)t_1s)$	$\left\{\left[\frac{1}{xy}\right],\left[\frac{1}{xy^2}\right]-\left(\frac{13}{12}t_1+\frac{2t_2}{t_1}\right)\left[\frac{1}{xy}\right]\right\}$	$22-2=20$
$\mathbb{V}(t_1)\backslash\mathbb{V}((4s^3+27)t_2s)$	$\{\left[\frac{1}{xy}\right]\}$	$22-1=21$
$\mathbb{V}(t_1,t_2)\backslash\mathbb{V}((4s^3+27)s)$	$\{0\}$	$22-0=22$

5. 得られたベクトル空間 $f(H_J)$ の一次独立な基底に対して, 論文 [20] のスタンダード基底を求める方法を適用することで, (変数 (x,y) の重みベクトル $\mathbf{w}=(4,1)$ に対する局所重み付き辞書式項順序 $(1>x>y)$ に関する) イデアル $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(f(H_J))$ のパラメータ付きスタンダード基底を次のように得ることができる。

stratum	$\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(f(H_J))$ のスタンダード基底
$\mathbf{V}(s)$	$\emptyset$
$\mathbf{C}^3\backslash\mathbf{V}((4s^3+27)t_1s)$	$\{x,y^2\}$
$\mathbf{V}(t_1)\backslash\mathbf{V}((4s^3+27)us)$	$\{x,y\}$
$\mathbf{V}(t_1,u)\backslash\mathbf{V}((4s^3+27)s)$	$\emptyset$

5 おわりに

本稿では, パラメータを含む半擬斉次多項式の Tjurina 数の値に応じてパラメータ空間を分割した stratification を求める効率的なアルゴリズムを紹介した。このアルゴリズムは H_J の基底の計算後にその情報を使って Tjurina 数を求める方法である。論文 [6, 7, 20] の計算法で直接 H_T の基底代数的局所コホモロジー類を計算することは可能である。しかしながら, 論文 [8, 9] に示されているように半擬斉次多項式の場合, H_J と H_T の計算速度には大きな違いがあり H_J の代数的局所コホモロジー類の基底を求める方が H_T の基底を求めることよりも容易であり計算効率も良い。すなわち, H_J を介して Tjurina 数を求める本稿の方法は, 直接 H_T を計算するより効率的である。

謝辞

本研究において第一著者は科学研究費補助金 (課題番号:22740065), 第二著者は科学研究費補助金 (課題番号:24540162) の助成を受けている。

参考文献

[1] 阿部隆行, 田島慎一, 孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーとヤコビイデアルに対するグレブナー基底の計算法, 数理解析研究所講究録 **1514**, pp.141-147, (2006).

[2] D. Kapur, Y. Sun, and D. Wang, A new algorithm for computing comprehensive Gröbner systems, *Proc. ISSAC'10*, pp. 29–36. AMC-Press (2010).

[3] B. Martin and G. Pfister, The kernel of the Kodaira-Spencer map of the versal μ-constant deformation of an irreducible plane curve with C^*-action, *J. Symbolic Comp.*, **7**, pp. 527–531, (1989).

[4] K. Nabeshima, A speed-up of the algorithm for computing comprehensive Gröbner systems, *Proc. ISSAC'07*, pp. 299–306. AMC-Press (2007).

[5] 鍋島克輔, 中村弥生, 田島慎一, 代数的局所コホモロジーを利用したスタンダード基底・グレブナー基底の実装について, 数理解析研究所講究録 **1764**, pp.102-125, (2011).

[6] 鍋島克輔, 中村弥生, 田島慎一, パラメータ付き零次元代数的局所コホモロジーを用いたパラメトリック・スタンダード基底計算について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1814**, pp. 43–53, (2012).

[7] K. Nabeshima, Y. Nakamura and S. Tajima, Parametric standard bases and algebraic local cohomology for zero-dimensional ideals, preprint.

[8] 鍋島克輔, 田島慎一, パラメータ付き代数的局所コホモロジーの計算について–半擬斉次孤立特異点の場合–, 数理解析研究所講究録 **1784**, pp. 111–122, (2012).

[9] K. Nabeshima and S. Tajima, On the computation of algebraic local cohomology classes associated with semi-quasihomogeneous singularities, to appear in *Advanced Studies in Pure Mathematics.*

[10] 中村弥生, 田島慎一, Inner modality 4 以下の半擬斉次孤立特異点に付随したホロノミック系について, 数理解析研究所講究録 **1431**, pp.55-67, (2005).

[11] Y. Nakamura and S Tajima, On weighted-degrees for algebraic local cohomologies associated with semiquasihomogeneous singularities, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **46**, pp. 105–117, (2007).

[12] Y. Nakamura and S. Tajima, Algebraic local cohomologies and local b-functions Attached to semi-quasihomogeneous singularities with $L(f) = 2$, *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics*, **20**, pp. 103–116, (2012).

[13] M. Noro and T. Takeshima, Risa/Asir- A computer algebra system, *Proc. ISSAC'92*, pp.387-396, ACM-Press, (1992).

[14] K. Saito, Quasihomogeneous isolated Singularitäten von Hyperflächen, *Invent. Math.* **14**, pp. 123–142 (1971).

[15] A. Suzuki and Y. Sato, A simple algorithm to compute comprehensive Gröbner bases using Gröbner Bases, *Proc. ISSAC'06*, pp. 326–331. AMC-Press (2006).

[16] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について, 数理解析研究所講究録 **1456**, pp.126-132, (2005).

[17] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について II, 数理解析研究所講究録 **1568**, pp.74-80, (2007).

[18] S. Tajima, Parametric local cohomology classes and Tjurina stratifications for μ-constant deformations of quasi-homogeneous singularities, to appear.

[19] S. Tajima and Y. Nakamura, Algebraic local cohomology class attached to quasi-homogeneous isolated hypersurface singularities, *RIMS, Kyoto Univ.* **41**, pp.1 - 10, (2005).

[20] S. Tajima, Y. Nakamura and K. Nabeshima, Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **56**, pp. 341–361, (2009).

[21] V. Weispfenning, Comprehensive Gröbner bases. *J. Symbolic Comp.* **14**(1), pp. 1–29 (1992).